$\boxed{1}$

Considere el siguiente sistema lineal que depende de los parámetros a y b.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & -1 \\ 2x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & 4y & + & az & = & -1 \\ -x & + & 2y & + & z & = & b \end{array}\right.$$

(a) (6 puntos) Discuta el sistema dependiendo de los valores de los parámetros a, b.

(b) (4 puntos) Resuelva el sistema para los valores de a y b para los que la solución es única.

Solution:

(a) Mediante eliminación Gaussiana transformamos la matriz aumentada del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & a & -1 \\ -1 & 2 & 1 & b \end{pmatrix}$$

en una matriz equivalente más simple. Las operaciones por filas $f_2 - 2f_1$, $f_3 - f_1$ and $f_4 + f_1$ dan lugar a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & a-1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & b+1 \end{pmatrix}$$

y finalmente, $f_4 - 2f_3$ da la forma reducida

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 4-2a & b+1 \end{pmatrix}.$$

A pesar de que no es una matriz escalonada, el estudio es ahora muy fácil. Tenemos que hallar el rango de A, que es 3 como máximo y el rango de la matriz aumentada. Observamos que las tres primeras columnas nunca son nulas. Por tanto, tenemos los siguientes casos.

- $a \neq 2$ o $b \neq -1$. El rango de la matriz aumentada es 4 (dado que la cuarta fina no es nula). No existe solución del sistema.
- $a = 2$ y $b = -1$. La cuarta fila es nula. Ambas matrices tienen rango 3. El sistema admite una única solución.

(b) Al imponer $a = 2$ y $b = -1$ en el sistema obtenido anteriormente y resolverlo desde la última ecuación a la primera, hallamos

$$x = -1, \quad y = -2, \quad z = 4.$$

$\boxed{2}$

Responda las siguientes cuestiones.

(a) (5 puntos) Halle el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 6 & 7 & 3 & -3 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

(b) (5 puntos) Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} x & 2 \\ -2 & y \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Halle todos los valoes de x, y tales que se verifica la siguiente ecuación matricial.

$$AB = B^2.$$

Solution:

(a) La operación entre filas $r_1 - r_3$ y la expansión por la cuarta columna da

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+4}(-3) \begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 192.$$

(b) Al hacer el producto vemos que $B^2 = B$. Por tanto, la ecuación matricial es

$$\begin{pmatrix} x & 2 \\ -2 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Realizando el producto e igualando las entradas obtenidas en la matriz de la izquierda y en la de la derecha de la igualdad, obtenemos las ecuaciones independientes $x - 2 = 1$, $-2 - y = -1$. Por tanto, $x = 3$ y $y = -1$ es la respuesta.

$\boxed{3}$

Se considera la función $f(x) = 2\sqrt{x^2+1} - x$.

(a) (5 puntos) Halle el dominio de f. Estudie los intervalos donde f es monótona.

(b) (5 puntos) Calcule las asítotas oblícuas de f.

Solution:

(a) La función f está bien definida para todo x. Es diferenciable, con derivada

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} - 1.$$

La ecuación $f'(x) = 0$ es $2x = \sqrt{x^2+1}$, es decir, $4x^2 = x^2+1$, o $3x^2 = 1$. Esta ecuación admite dos soluciones $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Sin embargo, una de ellas aparece al elevar al cuadrado la ecuación original, $2x = \sqrt{x^2+1}$; de hecho, la parte derecha de la ecuación es positiva, por lo que x es positivo, por lo que no consideramos el valor negatrivo. El único punto crítico de $f$eis $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Dado que $0 < \frac{1}{\sqrt{3}}$ y $f'(0) < 0$ y que $1 > \frac{1}{\sqrt{3}}$ y $f'(1) > 0$, concluimos que f decreciente en $(-\infty, \frac{1}{\sqrt{3}})$ y creciente en $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$ (de paso hemos probado que $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ es el mínimo global de f).

(b) Las asíntotas oblícuas son rectas $y = mx + n$ que aproximan la gráfica de f en $+\infty$ o en $-\infty$. Consideramos primero $+\infty$. Por definición

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x^2+1} - x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x^2+1}}{x} - 1 = \lim_{x\to\infty} 2\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} - 1 = 2 - 1 = 1.$$

También

$$n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} 2\sqrt{x^2+1} - x - x = 2\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1} - x = 0,$$

que se obtiene tas multiplicar y dividir por $\sqrt{x^2+1} + x$. Por tanto, la asíntota oblícua en $+\infty$ es $y = x$.

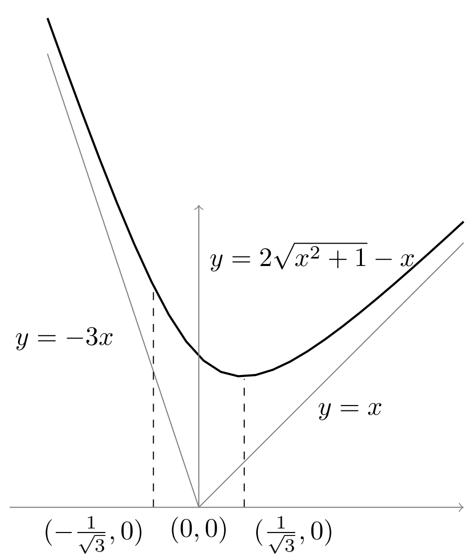
Ahora consideramos $-\infty$. Como antes, tenemos

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2\sqrt{x^2+1} - x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2\sqrt{x^2+1}}{x} - 1 = \lim_{x\to\infty} -2\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} - 1 = -2 - 1 = -3.$$

También

$$n = \lim_{x\to-\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} 2\sqrt{x^2+1} - x + 3x = 2\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1} + x = 0,$$

que se obtiene de manera similar al caso anterior. Por tanto, la asíntota oblícua en $-\infty$ es $y = -3x$. La figura muestra la gráfica de la función y sus asíntotas.



$\boxed{4}$

Conteste las siguientes cuestiones.

(a) (6 puntos) Enuncie el Teorema def Weierstrass. Calcule los extremos locales y globales de la función $f(x) = 12x - x^3$ en el intervalo $[-3, 3]$.

(b) (4 puntos) Calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{-x}}{e^{2x}-e^{-x}}.$$

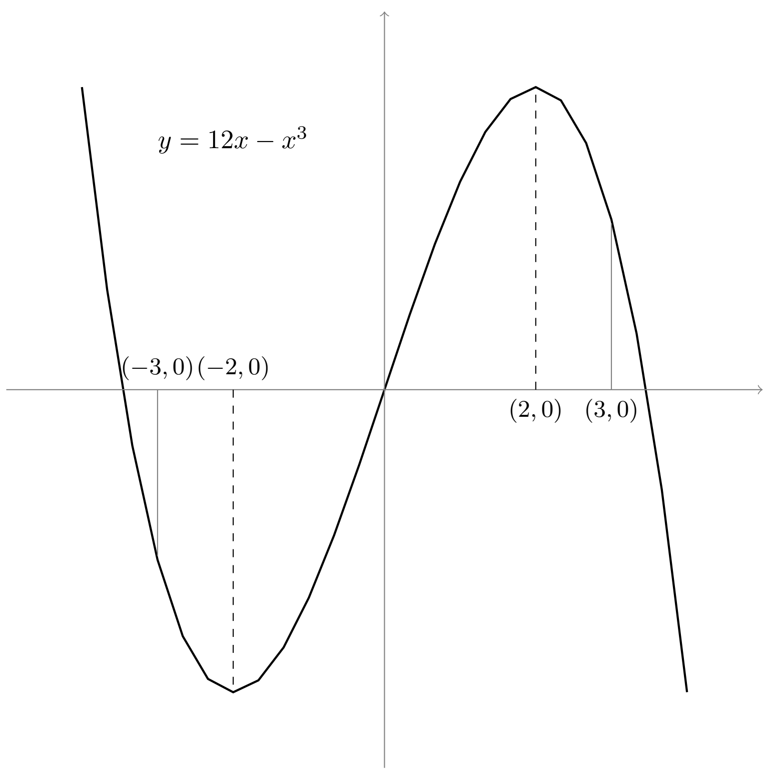
Solution:

(a) Teorema def Weierstrass: Toda función continua definida sobre un intervalo cerrado y acotado $a, b]$, alcanza en $[a, b]$ máximo y mínimo globales.

La función f es continua y diferenciable en el intervalo cerrado y acotado $I = [-3, 3]$. Por el Teorema de Weirstrass, alcanza extremos globales en I. Además, f' se anula en los extremos locales de f que pertenezcan a $(-3, 3)$. (puntos críticos de f). Resolviendo $f'(x) = 12 - 3x^2 = 0$ obtenemos $x = -2$ y $x = 2$. Ambos puntos pertenecen a I. Por tanto, los posibles extremos de f en I son -3, -2, 2 y 3. Evaluando f en estos puntos, tenemos

$$f(-3) = -9, \quad f(-2) = -16, \quad f(2) = 16, \quad f(3) = 9.$$

En consecuencia, -3 es máximo local de f en I, dado que f es decreciente en -3. También, 3 es un mínimo local de f en I, dado que f es decreciente en 3. El punto -2 es el mínimo global en I y 2 es el máximo global.



(b) El límite es indeterminado de la forma $\frac{0}{0}$. Aplicando la regla de L'hopital, tenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{-x}}{e^{2x}-e^{-x}} = \frac{1-e^0}{e^0-e^0} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(1-e^{-x})}{\frac{d}{dx}(e^{2x}-e^{-x})} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}}{2e^{2x}+e^{-x}} = \frac{e^0}{2e^0+e^0} = \frac{1}{3}.$$

$\boxed{5}$

Se considera la siguiente función, que depende del parámetro a, $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{2-x}, & \text{if } x < 0; \\ 1, & \text{if } x = 0; \\ e^{\frac{x}{2}}, & \text{if } x > 0. \end{cases}$

(a) (5 puntos) Estudie la continuidad de f.

(b) (5 puntos) Estudie la derivabilidad de f.

Solution:

El dominio de f es toda la recta real. Es claro que f es continua y diferenciable en cualquier punto $x \neq 0$, cualquiera que sea el valor de a.

(a) El límite por la izquierda en 0 vale $\frac{a}{2}$ y el límite por la derecha 1; luego $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe y vale $1 = f(0)$si y sólo si $a = 2$. Por tanto, f es continua en 0 sii $a = 2$.

(b) La función no es derivable en 0 si $a \neq 2$, dado que f no es continua en este caso. Por tanto, imponemos $a = 2$, de manera que $f(x) = \frac{2}{2-x}$ para $x < 0$; la derivada lateral por la izquierda es

$$\left(\frac{2}{2-x}\right)'\Big|_{\{x=0\}} = \frac{2}{(2-x)^2}\Big|_{\{x=0\}} = \frac{1}{2}.$$

(Pero

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{2}{2-h} - 1}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{2-h} = \frac{1}{2}.$$

es la manera en que la definición debiera aplicarse). La derivada lateral por la derecha es

$$\left(e^{\frac{x}{2}}\right)'\Big|_{\{x=0\}} = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\Big|_{\{x=0\}} = \frac{1}{2}.$$

(Pero

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{\frac{h}{2}} - 1}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{1}{2}e^{\frac{h}{2}}}{1} = \frac{1}{2}.$$

es la manera en que la definición debiera aplicarse).

Concluimos que f es derivable en $x = 0$ sii $a = 2$, y entonces $f'(0) = \frac{1}{2}$.

$\boxed{6}$

Conteste las siguientes cuestiones.

(a) (5 puntos) Calcule el área de la región finita encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 - 2$ y $g(x) = x$.

(b) (5 puntos) Calcule **sólo una** de las dos siguientes integrales indefinidas.

$$\text{(a)} \int \frac{1}{x^2 + x} dx; \qquad \text{(b)} \int x^4 \ln x dx.$$

Solution:

(a) Los puntos de intersección de f y g son $x = -1$, $x = 2$. Dado que f y g son continuas y que $f(0) = -2 < 0 = g(0)$, en el intervalo $[-1, 2]$, $f \leq g$. Luego el área es

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{2} (g(x) - f(x))dx = \int_{-1}^{2} (x - x^2 + 2)dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x\Big|_{-1}^{2} \\ &= \left(\frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} + 2 \times 2\right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} - \frac{(-1)^3}{3} + 2(-1)\right) = 2 - \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 2 = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

(b)

- Por partes, $u = \ln x$ y $dv = x^4 dx$, luego $u = x^{-1} dx$ y $v = \frac{x^5}{5}$. Entonces

$$\int x^4 \ln x dx = \frac{x^5}{5} \ln x - \int \frac{x^5}{5} x^{-1} dx = \frac{x^5}{5} \ln x - \frac{x^5}{25} + C.$$

- Es una integral racional. Notar que $\frac{1}{x^x+x} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1+x}$ sii $1 = A(1+x) + Bx$, sii $A = 1$ y $B = -1$ (por ejemplo, substitutir $x = 0$ y $x = -1$ para obtener los valores de A y B). Entonces

$$\int \frac{1}{x^x + x} dx = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{1+x} dx = \ln x - \ln (1 + x) + C.$$